

数学概念形成的情景创设

奋斗中学高二数学组/孟莹

摘自：《奋斗中学》

[关键词]：数学概念；数学思想；情景创设

数学概念的教学一般都要经历概念的形成、概念的表述、概念的辨析、概念的应用等阶段。在数学概念的教学过程中，很多教师往往不注重概念的形成过程，只重视概念的运用，忽视了知识的产生与形成阶段，强行地将一些新的数学概念灌输给学生，没有体现学生的主体性，将严重影响学生形成正确的数学观，阻碍学生的能力提高。造成这种现象的原因，一方面是由于教师的教学观念比较陈旧，在教学中不重视学生的思维活动，不能使学生的认知过程成为一个再创造的过程，另一方面是许多教师不知如何创设数学概念形成的情景，循序渐进地引导学生开展探索活动。在数学概念教学中，如何设计有效的问题情景，充分调动学生参与课堂教学活动，使学生经历观察、分析、类比、猜想、归纳、推理、抽象、概括等思维活动，探究规律，得出新的数学概念。从而使学生体验到数学概念的形成过程，提高他们对数学的认识水平，掌握数学思想方法，培养数学能力，这是数学概念教学要研究的首要问题。

数学概念有些是从生产、生活中抽象出来的，有些是由数学自身的发展而产生的，许多数学概念源于生活，但又高于生活。根据数学概念产生的方式及数学思维的一般方法，结合学生的认知特点，可以用下列几种方法来创设数学概念形成的情景。

（一）回顾已有相似概念，创设类比发现的情景

中学数学中有许多概念具有相似的属性，对于这些概念的教学，教师可先引导学生研究已学过的概念属性，然后创设类比发现的问题情景，引导学生去发现，尝试给新概念下定义，这样新的概念容易在原有的认知结构中得以同化与构建。

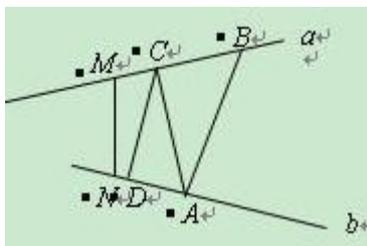
例 1 异面直线的距离的教学

（1）展示概念背景：向学生指出：刻划两条异面直线相对位置的一个几何量——异面直线所成的角，这只能反映两异面直线的倾斜程度，若要刻划其远近程度，需要用另一个量——异面直线之间的距离。

（2）创设类比发现的情景：先引导学生回顾一下过去学过的有关距离的概念（点与点间的距离、点到直线的距离、平行线之间的距离），并概括出它们的共同点：各种距离概念都归结为点与点间的距离；每种距离都是确定的而且是最小的。

（3）启迪发现阶段：指出定义两异面直线的距离也必须遵循上述原则，然后引导学生讨论：异面直线 a 、 b 上哪两点之间的距离最小？为什么？

进一步诱导：如下图，过直线 a 上一点 B 作 $AB \perp$ 直线 b ，垂足为点 A ，则线段 AB 的长为异面直线 a, b 间的距离，对吗？因为过 A 作 $AC \perp$ 直线 a ，垂足为 C ，在 $RT\Delta ABC$ 中有 $AB > AC$ ，即 AB 不具有最小性。再过 C 作 $CD \perp$ 直线 b ，如此下去……，线段只垂直于 a, b 中的一条时，总是某直角三角形的斜边，不可能是 a, b 上任两点间距离的最小者，那么，异面直线 a, b 上任两点间距离的最小值到底应该是哪条线段的长呢？学生会发现：可能是与异面直线 a, b 都垂直相交的线段。



(4) 表述论证阶段：最后引导学生发现：异面直线 a, b 的公垂线段 MN 的长度具有最小性，又公垂线是唯一的，所以，可以把线段 MN 定义为异面直线 a, b 之间的距离。

以上通过引导学生研究已有“距离”概念的本质特点，以类比方法获得异面直线距离的概念，学生觉得这一概念是已有距离概念的一种自然发展，不感到奇怪。这样的概念还有很多，如复数的模与实数的绝对值类比、二次方程与一次方程的类比、空间的二面角与平面角类比等等。当然要注意类比得出的结论不一定正确，应引导学生修正错误的类比设想，直到得出正确结果。

(二) 由已有相关概念的比较，创设归纳发现的情景

有些数学概念是已有概念的扩充，若能揭示概念的扩充规律，便可以水到渠成地引入新概念。

例 2 复数概念的教学

先回顾已经历过的几次数集扩充的事实：

正整数 \rightarrow 自然数 \rightarrow 非负有理数 \rightarrow 有理数 \rightarrow 实数，然后教师提出以下问题：

(1) 上述数集扩充的原因及其规律如何？

实际问题的需要使得在已有的数集内有些运算无法进行，数集的扩充过程体现了如下规律：

- ① 每次扩充都增加规定了新元素；
- ② 在原数集内成立的运算规律，在数集扩充后的更大范围内仍然成立；
- ③ 扩充后的新数集里能解决原数集不能解决的问题。

有了上述准备后，教师提出问题：负数不能开平方的事实说明实数集不够完善，因而提出将实数集扩充为一个更为完整的数集的必要性。那么，怎样解决这个问题呢？

(2) 借鉴上述规律，为了扩充实数集，引入新元素 i ，并作出两条规定。（略）

这样学生对 i 的引入不会感到疑惑，对复数集概念的建立也不会觉得突然，使学生的思维很自然地步入知识发生和形成的轨道中，为概念的理解和进一步研究奠定基础。

这类数学概念形成的问题情景创设的关键是揭示出相关概念的扩充发展的背景及其规律，从而引发新的数学概念的产生。

（三）联想相关数学概念，创设引发猜想的情景

许多数学概念间存在着一定的联系，教师若能将新旧概念间的联系点设计成问题情景，引导学生建立起新旧概念间的联系，便可以使学生牢固地掌握新的概念。

例 3 异面直线所成角的概念教学

（1）展示概念背景：教师与学生一起以熟悉的正方体为例，请学生观察图中有几对异面直线？接着提问：从位置关系看，同为异面直线，但它们的相对位置，是否就没有区别？教师紧接着说：既然有区别，说明仅用“异面”来描述异面直线间的相对位置显然是不够的。在生产实际与数学问题中，有时还需要进一步精确化，这就提出了一个新任务：怎样刻划异面直线间的这种相对位置？

（2）情境设计阶段：我们知道平面几何中用“距离”来刻划两平行直线间的相对位置，用“角”来刻划两相交直线间的相对位置，那么用什么来刻划两异面直线的相对位置呢？我们还知道两异面直线不相交，但它们又确实存在倾斜程度不同，这就需要我们找到一个角，用它的大小来度量异面直线的相对倾斜程度。为了解决这个问题，我们研究一道题：一张纸上画有两条能相交的直线 a 、 b （但交点在纸外）。现给你一副三角板和量角器，限定不许拼接纸片，不许延长纸上的线段，问如何能量出 a 、 b 所成的角的大小？

（3）猜想发现阶段：解决上述问题的方法是过一点分别作 a 、 b 的平行线，该方法能否迁移到两异面直线的倾斜程度呢？经学生研讨后能粗略地得出异面直线的倾斜程度可转化为平面内两条相交直线的角。

（4）表述论证阶段：教师提问，这角一定可以作出来吗？角的大小与作法有什么关系？（以上即是存在性和确定性问题）通过解决以上两个问题得到：两异面直线所成角的范围规定在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内，那么它的大小，由异面直线本身决定，而与点 O （一线的平行线与另一线的平行线的交点）的选取无关，点 O 可任选。一般总是将点 O 选在特殊位置。至此，两异面直线所成角的概念完全建立了，在这个过程中渗透了把空间问题转化为平面问题这一化归的数学思想方法。

这类数学概念形成的问题情景创设一定要抓住新、旧数学概念间的本质属性，为新概念的产生创设适当的固着点，使其孕育新的数学概念的形成。

（四）通过学生实验，创设观察、发现的情景

有些数学概念可以通过引导学生从自己的亲自实验或通过现代教育技术手段演示及自己操作（如几何画板提供了很好的工具）去领悟数学概念的形成，让学生在动手操作、探索反思中掌握数学概念。

例 4 椭圆概念的教学

可分下列几个步骤进行：（1）实验获得感性认识（要求学生用事先准备的两个小图钉和一长度为定长的细线，将细线的两端固定，用铅笔把细线拉紧，使笔尖在纸上慢慢移动，画得图形

为椭圆) (2) 提出问题, 思考讨论。椭圆上的点有何特征? 当细线的长等于两定点之间的距离时, 其轨迹是什么? 当细线的长小于两定点之间的距离时, 其轨迹是什么? 你能给椭圆下一个定义吗? (3) 揭示本质, 给出定义。象这样, 学生经历了实验、讨论后, 对椭圆的定义的实质会掌握得很好, 不会出现忽略椭圆定义中的定长应大于两定点之间的距离的错误。

这类数学概念的形成一定要学生动手操作实验, 仔细观察, 并能根据需要适当变换角度来抓住问题的特征以解决问题。培养学生敏锐的观察力是解决这类问题的关键。除了真实的实验外, 还可以充分利用现代教育技术设计一些仿真实验, 实验的设计不能只是作为教师来演示的一种工具, 而是要能由学生可以根据自己的思路进行动手操作的学具, 让学生通过实际操作学会观察、学会发现!

以上列举的几种方法不是独立的, 而是相互联系的, 有些数学概念的产生与形成过程需要综合运用多种方法才能创设出利于学生发现的问题情景。这种不断实验、观察、进而得到发现的方法要让学生通过学习逐步掌握。学生掌握这些方法将受益终身!

[参考文献]:

[1]叶芳琴.《暴露什么与怎样暴露》.《数学通报》, 1997年第10期.

[2]章建跃.《关于课堂教学中设置问题情景的几个问题》.《数学通报》, 1994年第6期.

[3]石志群.《问题与活动——课堂教学的核心》.《中学数学》, 2000年第10期.